Analyse

I) Quelques inégalités

Entiers

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'entier $n^2 + 3n + 1$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 2 Déterminer les entiers $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Inégalité arithmético-géométrique

Exercice 3 1. Montrer que pour $a, b \geq 0$, on a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Quel est le cas d'égalité ?

2. En déduire que pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Quel est le cas d'égalité ? Que peut-on dire si $x < 0$?
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\quad a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

Exercice 4 1. Montrer que, pour $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$, on a $\quad \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$.

Indication : *Chercher à appliquer plusieurs fois l'inégalité* $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer que $\quad \dfrac{4}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_4}} \leq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \leq \sqrt{\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_4^2}{4}}$.

Indication : *Dans un second temps, pour l'inégalité de droite, on pourra considérer la somme* $\sum\limits_{i<j} (x_i - x_j)^2$.

Racines et quantité conjuguée

Exercice 5 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

Exercice 6 Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\quad \forall p, q \in \mathbb{N}^*, \ \left| \sqrt{2} - \dfrac{p}{q} \right| \geq \dfrac{C}{q^2}$.

Exposants

Exercice 7 Pour quels $x \in \mathbb{R}$ existe-t-il $n \geq 3$ tel que $\cos^n x + \sin^n x = 1$?

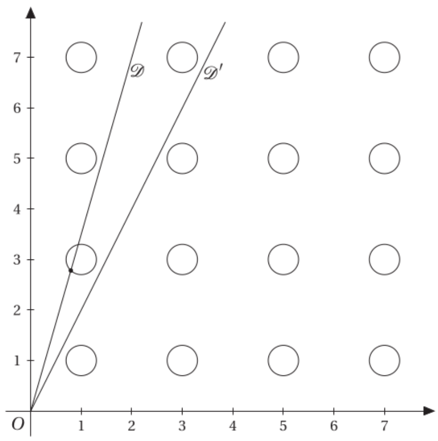
Exercice 8 Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $x^{(x^{2025})} = 2025$? En expliciter une.

Exercice 9 $\mathbb{T}^{\ell e}$ Quels sont les entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $a^b = b^a$? **Indication** : *Utiliser la fonction* ln.

II) La forêt

Un observateur se trouve à l'origine du plan. Des arbres identiques, dont les troncs ont pour rayon $R > 0$, sont placés en chaque point de coordonnées (a, b) où a, b sont des entiers impairs. On se restreint au quart de plan $x > 0, y > 0$. On dira que l'observateur voit à travers la forêt s'il existe une demi-droite issue de l'origine contenue dans le quart de plan ouvert (sans les bords) qui ne rencontre aucun des cercles.

Pour $m > 0$, on note $\mathcal{D}_m$ la demi-droite d'équation $y = mx$ et $x > 0$.



On admet le résultat suivant

> **Théorème** Si $m > 0$ est irrationnel, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ impairs tels que $|b - ma| \leq \varepsilon$.

1. Soient $a, b, m > 0$. Montrer que $\mathcal{D}_m$ rencontre le cercle de rayon $R > 0$ centré en (a, b) si et seulement si $|b - ma| \leq R\sqrt{1 + m^2}$.

2. En déduire que si m est irrationnel, $\mathcal{D}_m$ rencontre un arbre.

1) Pentes rationnelles

On suppose que $m = \frac{b}{a}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

3. Si a et b sont impairs, $\mathcal{D}_m$ rencontre-t-elle un arbre ?

4. On suppose que a, b sont de parités différentes et que $\mathcal{D}_m$ rencontre un arbre. Montrer que $1 \leq R\sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Conclusion

5. Montrer que si toutes les demi-droites $\mathcal{D}_m$ rencontrent un arbre, alors $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

6. Réciproquement, montrer que si $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$, toute demi-droite $\mathcal{D}_m$ rencontre un arbre planté en $(\alpha, 1)$ ou en $(1, \alpha)$, où $\alpha \in \mathbb{N}$ est impair.

7. En déduire que si l'observateur voit à travers la première rangée du bord de la forêt, il voit à travers toute la forêt.

★ Densité de $\{n\alpha\}$ et approximations par des quotients impairs

On se propose de justifier le résultat admis précédemment. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.
On pourra éventuellement considérer l'application $\varphi\colon x \mapsto e^{2i\pi x}$, qui vérifie, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \varphi(\{x\}), \quad \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi(x-y) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1}.$$

8. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ irrationnel, et on s'intéresse aux $\{n\alpha\}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- **a)** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\{n\alpha\} < \varepsilon$. **Indication** : *Utiliser le principe des tiroirs.*
- **b)** Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\big|\{n\alpha\} - x\big| \leq \varepsilon$.

9. Conclusion.
- **a)** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des entiers $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}$ tel que $|p\alpha - q| \leq \varepsilon$.
- **b)** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\big|(2p+1)\alpha - (2q+1)\big| \leq \varepsilon$.

III) Convergence de suites de racines

1. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où x_n est l'unique solution positive de l'équation $(E_n)\colon x^2 + \frac{1}{n}x - 1 = 0$.

2. Étudier la convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où y_n est l'unique solution positive de l'équation $(F_n)\colon \frac{1}{n}x^2 - x - 1 = 0$.

3. On considère $(G_n)\colon x^3 + \frac{1}{n}x^2 - 1 = 0$.
- **a)** Montrer que (G_n) admet une unique solution dans l'intervalle $]0,1[$, notée z_n.
- **b)** Montrer que (z_n) converge. **Ind** : *Considérer le signe de* $z_{n+1}^3 + \frac{1}{n}z_{n+1}^2 - 1$.
- **c)** Quelle est sa limite ?

4. On considère $(H_n)\colon \frac{1}{n}x^3 - x^2 - 1 = 0$.
- **a)** Montrer que (H_n) admet une unique solution notée t_n.
- **b)** Étudier la convergence de (t_n).

5. ★ Même chose pour l'unique solution positive de $(I_n)\colon x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$.

IV) Moyennes des précédents

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

1. Montrer que (u_n) est bornée, c'est-à-dire majorée et minorée.

2. Expliciter une relation de récurrence vérifiée par la suite $v_n = |u_{n+1} - u_n|$. En déduire que (v_n) converge.

3. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies par $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \max(u_n, u_{n+1}) \quad$ et $\quad w_n = \min(u_n, u_{n+1})$.
- **a)** Montrer que (v_n) et (w_n) sont monotones.
- **b)** Montrer que (v_n) et (w_n) convergent.
- **c)** Montrer que (u_n) converge.

4. On note ℓ la limite de (u_n). En considérant la suite $k_n = \frac{u_n}{2} + u_{n+1}$, déterminer ℓ en fonction de u_0 et u_1.

5. $\mathbb{T}^{\ell e}$ Expliciter la limite d'une suite (u_n) strictement positive vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

V) Moyennes prévisionnelles

On considère des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On dit qu'une telle suite de type $\mathcal{M}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}}{n}.$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de type $\mathcal{M}$ et $C \in \mathbb{R}$. Que dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_n - C)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2. Montrer que toute suite croissante de type $\mathcal{M}$ est constante.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de type $\mathcal{M}$. On suppose qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = an^2 + bn + c$. Montrer que $a = b = 0$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$ à valeurs ≥ 0. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$.
- **a)** Soit $p > r$. Montrer qu'il existe des entiers non nuls q, q' tels que $q < p \leq q' \leq 2q$ et $u_{q'} \leq u_q \leq u_r$.
  En déduire que $u_p \leq 3u_r$. **Ind** : *Deuxième partie : considérer et majorer la quantité* pu_p.
- **b)** Montrer que $u_p \leq 3u_r$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite type $\mathcal{M}$.
- **a)** On suppose que la suite (u_n) est minorée. Montrer qu'elle est bornée.
- **b)** Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si $u_p - D$ est un minorant de $\mathcal{M}$, alors $u_p - \frac{2}{3}D$ l'est également.
  Indication : *Utiliser la question* **4.**, *appliquée à une autre suite judicieuse.*
- **c)** En déduire que si la suite (u_n) est minorée, elle est constante.
- **d)** Que dire si (u_n) est majorée ?

6. Existe-t-il une suite non constante de type $\mathcal{M}$?